PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JUNIO – 2022

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho, propuestas. Solo se tendrán en cuesta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

1º) Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $e\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y λ un parámetro real cualquiera.

$a)$ Calcule la matriz $A - \lambda I$. $b)$ Calcule la matriz $(A - \lambda I)^2$.

$c)$ Halle, si existen, los valores del parámetro λ para los cuales se satisface la relación $(A - \lambda I)^2 = B$.

$a)$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}}.$$

$b)$

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow (A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 2 & 1 - 2\lambda & -2\lambda \\ 1 - 2\lambda & \lambda^2 - 2\lambda + 2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

$$(A - \lambda I)^2 = B \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda^2 + 2 & 1 - 2\lambda & -2\lambda \\ 1 - 2\lambda & \lambda^2 - 2\lambda + 2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

El único valor que satisface la igualdad de las matrices es $\underline{\lambda = 2}$.

****

2º) Considere el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} 3x-2y=4 \\ ay=-3 \\ ax+3z=0 \end{array}\right\}$, dependientes del parámetro a:

a) Discuta el sistema según el parámetro a.

b) Para el valor del parámetro a para el cual el sistema tiene solución, resuélvelo.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & a & 0 & -3 \\ a & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 3 \end{vmatrix}=9a=0 \Rightarrow a=0.$$

$$\underline{Para\ a\neq 0 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{3C_1=-2C_2\} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}=27\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=0 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$$

b)

Se resuelve el sistema para $a\neq 0$.

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y=4 \\ ay=-3 \\ ax+3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=-\frac{3}{a}. \qquad 3x+\frac{6}{a}=4;\ \ 3ax+6=4a \Rightarrow x=\frac{4a-6}{3a}.$$

$$a\cdot\frac{4a-6}{3a}+3z=0;\ \ \frac{4a-6}{3}+3z=0;\ \ 4a-6+9z=0 \Rightarrow z=\frac{4a-6}{9}.$$

$$\underline{Solución: x=\frac{4a-6}{3a};\ \ y=-\frac{3}{a};\ \ z=\frac{4a-6}{9}, \forall a\in R-\{0\}}.$$

****

3º) Considere la función $f(x)=e^{3x-2}$.

a) Determine las coordenadas del punto en el cual la tangente a la gráfica de la función $y=f(x)$ tiene pendiente igual a $\frac{3}{e}$. Halle la ecuación de esta recta tangente.

b) Calcule $\lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{1-f(x)}{6x-4}$.

c) Esboce la gráfica de la función $y=f(x)$.

d) Calcule la superficie acotada por la gráfica de la función $y=f(x)$ y las rectas de ecuaciones $x=0$ y $y=1$.

----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x)=3\cdot e^{3x-2}.$$

$$m=f'(x)=3\cdot e^{3x-2}=\frac{3}{e};\ \ e\cdot e^{3x-2}=1;\ \ e^{3x-1}=1 \Rightarrow 3x-1=0;$$

$$3x=1;\ \ x=\frac{1}{3}.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f\left(\frac{1}{3}\right)=e^{3\cdot\frac{1}{3}-2}=e^{-1}=\frac{1}{e} \Rightarrow P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{e}\right)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{e}\right)$:

$$y-\frac{1}{e}=\frac{3}{e}\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right);\ \ ey-1=3x-1.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t\equiv 3x-ey=0}.$$

b)

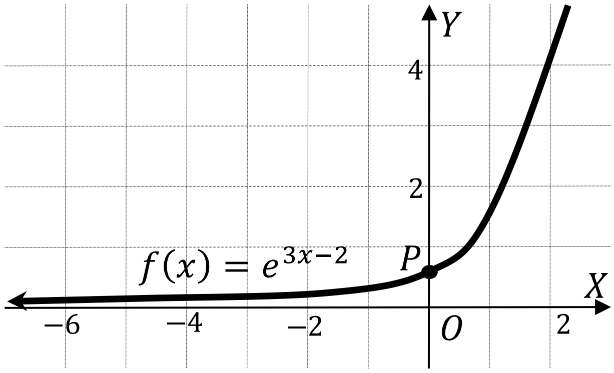
$$\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{1-f(x)}{6x-4}=\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{1-e^{3x-2}}{6x-4}=\frac{1-e^{3\cdot\frac{2}{3}-2}}{6\cdot\frac{2}{3}-4}=\frac{1-e^0}{4-4}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{-3\cdot e^{3x-2}}{6}=\frac{-3\cdot e^{3\cdot\frac{2}{3}-2}}{6}=\frac{-3\cdot e^0}{6}=\frac{-3}{6}\Rightarrow \underline{\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{1-f(x)}{6x-4}=-\frac{1}{2}}.$$

c)

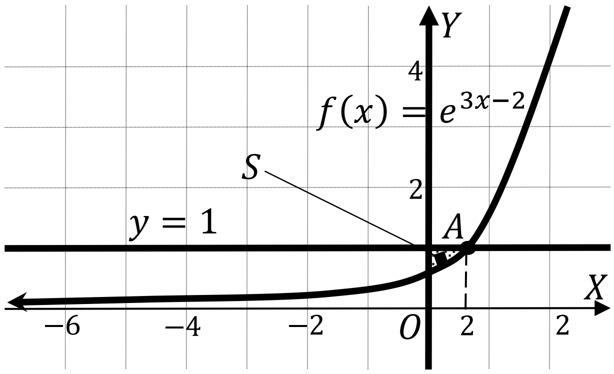
Para hacer una gráfica, aproximada, de la función $y=e^{3x-2}$ se tiene en cuenta que, por ser una función exponencial de base mayor que 1, es monótona creciente en su dominio, que es R; que tiene al eje de abscisas como asíntota horizontal en su parte negativa, por ser $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{3x-2} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$. El punto de corte de la función con el eje de ordenadas es: $f(0) = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \Rightarrow P\left(0, \frac{1}{e^2}\right)$.

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la que aparece en la figura adjunta.



$d)$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura siguiente.



El punto de corte de la función y la recta $y = 1$ tiene como abscisa la raíz de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$y = f(x) \Rightarrow e^{3x-2} = 1 \Rightarrow 3x - 2 = 0;\ \ 3x = 2;\ \ x = \frac{2}{3} \Rightarrow A\left(\frac{2}{3}, 1\right).$$

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{2}{3}} (1 - e^{3x-2}) \cdot dx = [x]_0^{\frac{2}{3}} - \int_0^{\frac{2}{3}} e^{3x-2} \cdot dx = \frac{2}{3} - \int_0^{\frac{2}{3}} e^{3x-2} \cdot dx \Rightarrow$$

$\Rightarrow S = \frac{2}{3} - I.$ (*)

$$I = \int_0^{\frac{2}{3}} e^{3x-2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 3x - 2 = t \\ dx = \frac{1}{3} \cdot dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = \frac{2}{3} \to t = 0 \\ x = 0 \to t = -2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \int_{-2}^{0} e^t \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot [e^t]_{-2}^{0} = \frac{1}{3} \cdot (e^0 - e^{-2}) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \Rightarrow I = \frac{e^2-1}{3e^2}.$$

Sustituyendo este valor en (*):

$$S = \frac{2}{3} - I = \frac{2}{3} - \frac{e^2-1}{3e^2} = \frac{2e^2-e^2+1}{3e^2} \Rightarrow \underline{S = \frac{e^2+1}{3e^2}\ u^2 \cong 0{,}378\ u^2}.$$

****

4º) Dada la función $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+a}{2x-4} & si\ \ x\le 0\\ 10x^2+x+b & si\ \ x>0\end{cases}$:

a) Halle la condición que han de cumplir los parámetros $a\ y\ b$ para que la función $y=f(x)$ sea continua.

b) Calcule $f'(x)$.

c) Halle la condición y calcule los parámetros $a\ y\ b$ para que la función $y=f(x)$ sea derivable.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=0\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+a}{2x-4}=-\frac{a}{4}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(10x^2+x+b)=b=f(0)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow -\frac{a}{4}=b\Rightarrow a=-4b.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ para\ a=-4b.}$$

b)

$$\underline{f'(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4x-a}{2(x-2)^2} & si\ x<0\quad (*)\\ 20x+1 & si\ \ x\ge 0\end{cases}.}$$

$$(*)\quad g(x)=\frac{x^2+a}{2x-4}\Rightarrow g'(x)=\frac{2x\cdot(2x-4)-(x^2+a)\cdot 2}{2^2\cdot(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2-a}{2\cdot(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-a}{2\cdot(x-2)^2}.$$

c)

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=0$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de $a\ y\ b$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x-a}{2(x-2)^2} & si\ x < 0 \quad (*) \\ 20x+1 & si\ \ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f'(0) = \begin{cases} -\frac{a}{8} & si\ \ x < 0 \\ 1\ \ si\ \ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow -\frac{a}{8} = 1 \Rightarrow a = -8.$$

Teniendo en cuenta que $a = -4b \Rightarrow b = -\frac{a}{4} = -\frac{-8}{4} \Rightarrow b = 2$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ y\ derivable\ en\ R\ para\ a = -8\ y\ b = 2.}$

****

5º) Del paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos) $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1,0,-1), B(2,1,0)\ y\ C(4,3,-2)$.

a) Calcule el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

b) Encuentre las coordenadas del punto medio, M, del segmento AC.

c) Encuentre las coordenadas del vértice D.

d) Calcule el área del paralelogramo $ABCD$.

----

a)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2,1,0) - (1,0,-1)] = (1,1,1).$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(4,3,-2) - (1,0,-1)] = (3,3,-1).$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(1,1,1)\cdot(3,3,-1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2+(-1)^2}} =$$

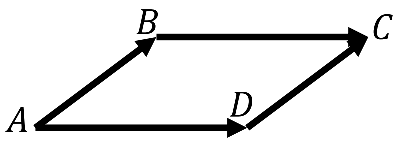
$$= \frac{3+3-1}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{9+9+1}} = \frac{5}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{19}} = \frac{5}{\sqrt{57}} \Rightarrow \underline{\cos\beta = \frac{5\sqrt{57}}{57}}.$$

b)

$$x_m = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2};\ \ y_m = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2};\ \ z_m = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)}.$$

c)

$$\overrightarrow{DC} \Rightarrow (1,1,1) = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} =$$



$$= [(4,3,-2) - (x,y,z)] = (4-x, 3-y, -2-z).$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (1,1,1) = (4-x, 3-y, -2-z) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-x = 1 \to x = 3 \\ 3-y = 1 \to y = 2 \\ -2-z = 1 \to z = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{D(3,2,-3)}.$$

d)

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(3,2,-3) - (1,0,-1)] = (2,2,-2)$$

El área de un paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{matrix} \right\| = |-2i + 2j + 2k - 2k - 2i + 2j| =$$

$$= |-4i + 4j| = 4 \cdot |-i + j| = 4 \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = 4 \cdot \sqrt{2}.$$

$$\underline{S = 4\sqrt{2}\, u^2}.$$

****

6º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-z=1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-4-\lambda \end{cases}$, $\lambda \in R$.

a) Encuentre una ecuación vectorial para la recta r.

b) Encuentre la posición relativa de las rectas r y s.

c) Encuentre la ecuación general del plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P(2,0,-1)$.

d) Encuentre la ecuación general del plano paralelo a r que contiene a la recta s.

----

a)

$$r \equiv \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-z=1 \end{cases} \Rightarrow x=\delta;\ \ y=3-\delta;\ \ z=-1+2\delta \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\delta \\ y=3-\delta \\ z=-1+2\delta \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{r \equiv (x,y,z)=(0,3,-1)+\delta \cdot (1,-1,2)}$.

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0,3,-1)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,2)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(1,0,-4)$ y $\overrightarrow{v_s}=(1,-1,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(1,0,-4)-(0,3,-1)]=(1,-3,-3)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 3-6+1+2-3-3=-6 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{w}\}=3\ \Rightarrow\ \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{w}\ no\ son\ coplanarios.$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$$

$c)$

Siendo $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 2)$ un vector director de la recta, la ecuación general del plano π es de la forma $\pi \equiv x - y + 2z + D = 0$.

Si el plano contiene al punto $P(2, 0, -1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x - y + 2z + D = 0 \\ P(2, 0, -1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 - 0 + 2 \cdot (-1) + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{\pi \equiv x - y + 2z = 0}$.

$d)$

El plano γ pedido tiene a $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 2)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1, -1, -1)$ como vectores directores y contiene al punto $B(1, 0, -4) \in s$. Su expresión general es la siguiente:

$$\gamma(B;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z + 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$(x - 1) + 2y - (z + 4) + (z + 4) + 2(x - 1) + y = 0;\ \ 3(x - 1) + 3y = 0;$

$x - 1 + y = 0 \Rightarrow \underline{\gamma \equiv x + y - 1 = 0}$.

****

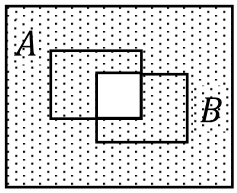
7º) Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A)=0{,}7$, $P(\overline{B})=0{,}4$ y $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0{,}58$, donde $\overline{A}\ y\ \overline{B}$ indican los sucesos contrarios (o complementarios) de A y de B, respectivamente. Calcule las siguientes probabilidades:

$a)$ $P(\overline{A}), P(B)\ y\ P(A\cap B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?

$b)$ $P(A\cup B)$. $c)$ $P(B\cap\overline{A})$. $d)$ $P(A/B)$ y $P(\overline{A}/B)$.

$a)$

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}7=\underline{0{,}3}$. $P(B)=1-P(\overline{B})=1-0{,}4=\underline{0{,}6}$.



$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(A\cap B)$

$P(\overline{A}\cup\overline{B})=0{,}58=1-P(A\cap B)$;

$P(A\cap B)=1-0{,}58=\underline{0{,}42}$.

Dos sucesos A y B son independientes si $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

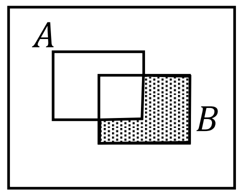
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\Rightarrow 0{,}42=0{,}7\cdot 0{,}6\Rightarrow \underline{A\ y\ B\ son\ independientes}$.

$b)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}7+0{,}6-0{,}42=\underline{0{,}88}$.

$c)$

$P(B\cap\overline{A})=P(B)-P(A\cap B)=0{,}6-0{,}42=\underline{0{,}18}$.



$B\cap\overline{A}=B-(A\cap B)$

$d)$

$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}42}{0{,}60}=\underline{0{,}7}$.

$P(\overline{A}/B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}18}{0{,}60}=\underline{0{,}3}$.

****

8º) El tiempo de duración de las actualizaciones de cierto programa antivirus sigue una distribución estadística normal de media 8,8 meses con una desviación típica de 3 meses.

a) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones supera los 10 meses?

b) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones se ha mantenido entre 7 y 10 meses?

c) ¿Para qué valor del parámetro c se tiene que el intervalo $(8{,}8 - c; 8{,}8 + c)$ es el intervalo de tiempo de duración del 98 % de las actualizaciones?

$Datos$: $\mu = 8{,}8;\ \ \sigma = 3.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(8{,}8;\ 3).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-8{,}8}{3}$.

a)

$$P = P(X \geq 10) = P\left(Z \geq \frac{10-8{,}8}{3}\right) = P\left(Z \geq \frac{1{,}2}{3}\right) = P(Z \geq 0{,}4) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = \underline{0{,}3446 = 34{,}46\ \%}.$$

b)

$$P = P(7 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{7-8{,}8}{3} \leq Z \leq \frac{10-8{,}8}{3}\right) = P\left(\frac{-1{,}8}{3} \leq Z \leq \frac{1{,}2}{3}\right) =$$

$$= P(-0{,}6 \leq Z \leq 0{,}4) = P(Z \leq 0{,}4) - P(Z \leq -0{,}6) =$$

$$= P(Z \leq 0{,}4) - [1 - P(Z \leq 0{,}6)] = P(Z \leq 0{,}4) - 1 + P(Z \leq 0{,}6) =$$

$$= 0{,}6554 - 1 + 0{,}7257 = 1{,}3811 - 1 = \underline{0{,}3811 = 38{,}11\ \%}.$$

c)

$$P(8{,}8 - c \leq X \leq 8{,}8 + c) = P\left(\frac{8{,}8-c-8{,}8}{3} \leq Z \leq \frac{8{,}8+c-8{,}8}{3}\right) = P\left(\frac{-c}{3} \leq Z \leq \frac{c}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-c}{3} \leq Z \leq \frac{c}{4}\right) = 0{,}9800.$$

$$P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - P\left(Z \leq -\frac{c}{3}\right) = P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right)\right] =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - 1 + P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) = 2 \cdot P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - 1 = 0{,}9800;$$

$2 \cdot P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) = 1{,}9800;\ \ P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) = 0{,}9900$. Mirando en la tabla $N(0{,}1)$ de forma inversa, al valor 0,9900 le corresponde, aproximadamente 2,33, por lo cual:

$\frac{c}{3} = 2{,}33 \Rightarrow \underline{c = 6{,}99}.$

****